

بسم الله الرحمن الرحيم

کلاس نکته و تست
نظریه زبان ها و ماشین ها

ابوالفضل گیلک

جلسه سوم – فصل دوم

تست 25 تا 41

ماشین متناهی

حل تست های 15 سال اخیر

ارشد – دکتری

مهندسی کامپیوتر – علوم کامپیوتر

فصل 2

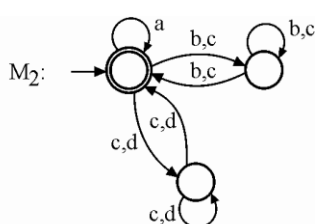
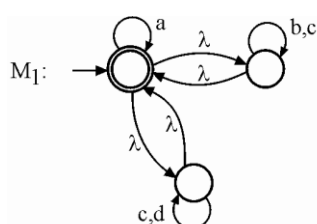
تست‌های ماشین‌های متناهی

25-41

25- اتومات‌های متناهی زیر را در نظر بگیرید سپس بیان کنید کدام گزینه درست است؟

(82)

(مهندسی کامپیوتر -



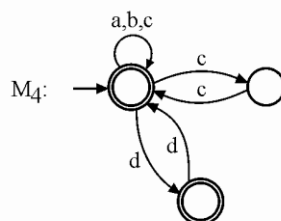
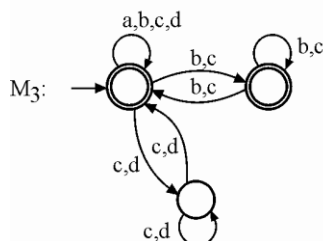
$$L(M_1) = L(M_3), L(M_4) \subset L(M_1) \quad (1)$$

$$L(M_2) = L(M_3), L(M_1) \subset L(M_2) \quad (2)$$

(3)

$$L(M_1) \cap L(M_3) \neq \emptyset, L(M_4) \subset L(M_2)$$

$$L(M_1) \subset L(M_3), L(M_2) \subset L(M_4) \quad (4)$$



(مهندسی کامپیوتر

26- یک NFA متناظر با زبان $L_n = \{a, b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{a, b\}^{n-1}$ حداقل چند وضعیت دارد؟

(90 -

$$2n+1 \quad (4)$$

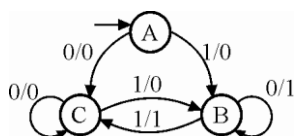
$$n+1 \quad (3)$$

$$n \quad (2)$$

$$n-1 \quad (1)$$

(مهندسی کامپیوتر - 75)

27- ماشین میلی شکل زیر را در نظر بگیرید:



(1) حالت A هم‌ارز حالت B است.

(2) حالت B هم‌ارز حالت C است.

(3) حالت A هم‌ارز حالت C است.

(4) هیچ کدام

28- رشته x کاهش یافته زیر رشته y است هرگاه با حذف یک زیر رشته از y بدست آمده باشد، مجموعه R برای زبان منظم L کاهش یافته زیر رشته است هرگاه $R \subseteq L$ و شامل هیچ دو عضو x و y نباشد که x کاهش یافته زیر رشته y است. R ماکسیمال است هرگاه نتوان هیچ رشته‌ای به آن اضافه کرد در حالیکه هنوز کاهش یافته زیر رشته‌ای باقی بماند. کدام گزینه در مورد M صحیح است؟ (علوم کامپیوتر - 96)

- (1) مجموعه R یکتا است.
- (2) مجموعه R همواره متناهی است.
- (3) تمام مجموعه‌های R دارای تعداد اعضای یکسان هستند.
- (4) طول هر کدام از اعضای R از یک مقدار ثابت وابسته به تعداد حالات اتوماتون پذیرنده L کمتر است.

29- یک اتوماتون متناهی قطعی کمینه برای زبان $(a^n)^*$ بر روی الفبای Σ دارای چند حالت است؟ (علوم کامپیوتر - 96)

- (1) n حالت
- (2) $n+1$ حالت
- (3) $n+2$ حالت
- (4) تعداد حالات وابسته به اندازه Σ است.

30- فرض کنید یک مجموعه متناهی مانند $B \neq \emptyset$ که شامل اعداد صحیح است داده شده است. حال هدف طراحی یک DFA روی الفبای 0 و 1 است بطوریکه هر رشته مانند $x = x_1, \dots, x_n$ که به این DFA داده می‌شود در صورتی پذیرش می‌گیرد که:

$$\forall i \in B \quad x = x_1, \dots, x_n \quad x_i = 0$$

تعداد state‌های این ماشین در حالت مینیمال کدام است؟ ($\text{Max}(B)$ به مفهوم ماکزیم‌ترین عضو مجموعه B است.)

(علوم کامپیوتر - 97)

- (1) $|B|+1$
- (2) $|B|+2$
- (3) $\text{Max}(B)+1$
- (4) $\text{Max}(B)+2$

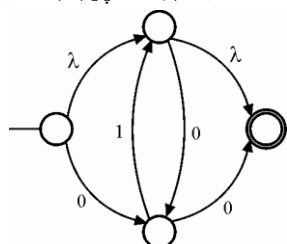
31- به ازای هر $K > 0$ ، state و حروف الفبای $\{0,1\}$ ، چه تعداد DFA با K state می‌توان ارائه کرد؟ (علوم کامپیوتر - 97)

- (1) $2^{2K} 2^K$
- (2) $2^{K+1} 2^{2K}$
- (3) $2^{2K+1} 2^K$
- (4) $2^{2K} 2^{K+1}$

32- فرض کنید یک زبان روی الفبای $\Sigma = \{a, b\}$ تعریف شده باشد به طوری که بین هر جفت a در رشته بتوان تعداد فرد b یافت. DFA مینیم روی این زبان شامل چند state است؟ (علوم کامپیوتر - 97)

- (1) 4
- (2) 5
- (3) 6
- (4) 7

(علوم کامپیوتر - 98)



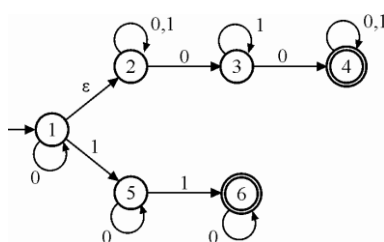
33- کدام گزینه در مورد اتوماتون متناهی زیر صحیح است؟

- (1) این اتوماتون قطعی است.
- (2) زبان این اتوماتون متناهی، متناهی است.
- (3) اتوماتون کمینه معادل آن دارای همین تعداد حالت است.
- (4) برای پذیرش هر ورودی $x \neq \lambda$ باید از تمام حالات این اتوماتون گذر کرد.

34- کدام رشته در زبان اتوماتای زیر نیست؟

- 1) 1010101000001
- 2) 0101010101010
- 3) 1000111000111
- 4) 0111111111111

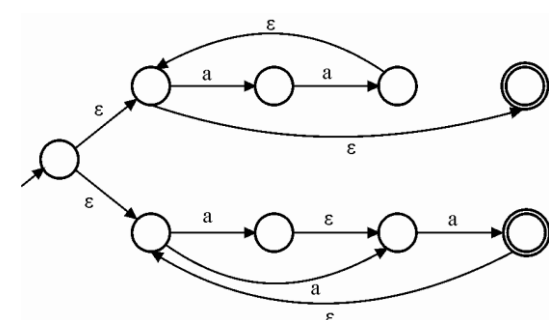
(علوم کامپیوتر - 1400)



35- NFA زیر را در الفبای $\Sigma = \{a\}$ به DFA معادل تبدیل می‌کنیم DFA حاصل حداقل چند حالت دارد؟

- 1) 5
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

(علوم کامپیوتر - 1400)



36- موارد زیر را در نظر بگیرید:

(علوم کامپیوتر - 1400)

- (I) کلاس زبان‌هایی که توسط NFAها تشخیص داده می‌شوند تحت مکمل بسته‌اند.
- (II) فرض کنیم D یک DFA باشد و $C = L(D)$. در این صورت یک DFA دیگر مانند $\bar{D}$ وجود دارد که زبان $L(D)$ را تشخیص می‌دهد.
- (III) فرض کنیم M یک NFA باشد که زبان C را تشخیص می‌دهد. هرگاه حالت‌های پذیرش و غیرپذیرش را در M به یکدیگر تبدیل کنیم به یک NFA می‌رسیم که زبان $\bar{C}$ را تشخیص می‌دهد.

چند مورد از گزاره‌های فوق درست هستند؟

- 1) 0
- 2) 1
- 3) 2
- 4) 3

37- فرض کنیم M یک DFA برای زبان زیر باشد:

$L = \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ با } b \text{ شروع می‌شود با } b \text{ تمام می‌شود و تعداد فردی } a \text{ دارد}\}$

M حداقل چند حالت دارد؟

(علوم کامپیوتر - 1400)

- 1) 3
- 2) 4
- 3) 5
- 4) 6

38- دو عبارت زیر را در نظر بگیرید:

(علوم کامپیوتر - 1401)

الف) فرض کنیم M یک NFA (اتوماتای متناهی نامعین) باشد و M' یک NFA کاملاً شبیه M با این تفاوت که حالت‌های پایانی (پذیرش) M در M' غیرپایانی و حالت‌های غیرپایانی M در M' پایانی شده‌اند. در این صورت زبان M' مکمل زبان M است.

ب) فرض کنیم M یک NFA با زبان L باشد و M' از روی M با پاک کردن کلیه یال‌های خروجی از تمام حالت‌های پذیرش به دست آمده است. در این صورت داریم:

$$L(M') = \{w \in L : w = uv \text{ که } v \in \Sigma^+, u \in L \text{ هیچ وجود ندارد}\}$$

کدام یک از این دو عبارت صحیح است؟

(1) فقط الف (2) فقط ب

(3) هر دو

(4) هیچ کدام

39- فرض کنیم L زبان NFA زیر باشد:

(علوم کامپیوتر - 1401)

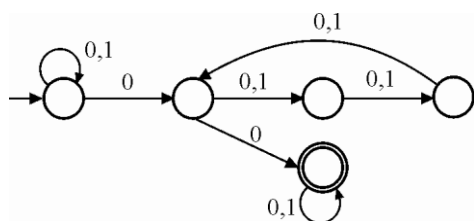
با قرار دادن کدام یک از دو مقدار 0 و 1 به جای x در عبارت $11110010x100011$ عبارت حاصل در L قرار می‌گیرد؟

(1) فقط صفر

(2) فقط 1

(3) هر دو

(4) هیچ کدام

40- از روی DFA های، D_1 و D_2 براساس ضرب دکارتی، DFA ای به نام D ساخته می‌شود که:

$$D_1 = \langle Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1 \rangle \Rightarrow D_1 \times D_2 = \langle Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, \langle q_1, q_2 \rangle, F \rangle$$

$$D_2 = \langle Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2 \rangle$$

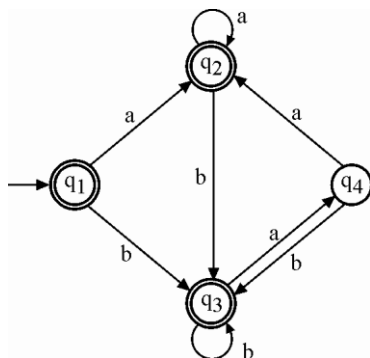
$$F = \{ \langle q_i, q_j \rangle \mid (q_i \in F_1 \wedge q_j \notin F_2) \vee (q_i \notin F_1 \wedge q_j \in F_2) \}$$

مجموعه F به شرح روبرو است:زبان $D_1 \times D_2$ را نیز با $L(D_1 \times D_2)$ نشان می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

(علوم کامپیوتر - 1402)

(1) اگر $L(D_1) = L(D_2)$ باشد پس $L(D_1 \times D_2) = \emptyset$ (2) اگر $L(D_1) \subseteq L(D_2)$ باشد پس $L(D_1 \times D_2) = \emptyset$ (3) اگر $L(D_1) \neq L(D_2)$ باشد پس $L(D_1 \times D_2) = \emptyset$ (4) اگر $L(D_2) \subseteq L(D_1)$ باشد پس $L(D_1 \times D_2) = \emptyset$

41- فرض کنید L زبان dfa مقابل باشد:



فرض کنیم $w \in L$ رشته‌ای از زبان L با طول حداقل 1403 باشد.

کدام مورد، همواره درست است؟ (علوه کامپیوتر - 1404)

الف - اگر w با a شروع شود رشته wa^{1403} حتماً در L خواهد بود.

ب - اگر w با b شروع شود رشته wb^{1403} حتماً در L خواهد بود.

(1) فقط «الف» (2) فقط «ب»

(3) هر دو (4) هیچ‌کدام

پاسخ تست‌های ماشین‌های متناهی

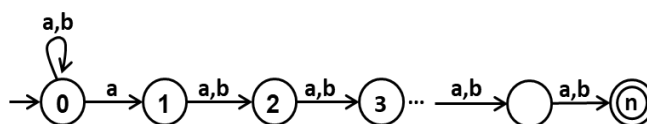
25-41

25- گزینه (1) صحیح است.

ماشین‌های M_1 و M_3 با هم معادلند و هردوی آنها تمامی رشته‌های مجموعه $\{a, b, c, d\}^*$ را می‌پذیرند. پس $L(M_1) = L(M_3) = \{a, b, c, d\}^*$ است و $L(M_2)$ و $L(M_4)$ زیرمجموعه آن دو هستند تا همین‌جا درستی گزینه یک معلوم است. زبان‌های $L(M_2)$ و $L(M_4)$ رابطه شمول با هم ندارند ماشین M_2 رشته dc را می‌پذیرد اما M_4 این رشته را نمی‌پذیرد. ماشین M_4 رشته b را می‌پذیرد اما M_2 آن را نمی‌پذیرد. پس $L(M_2)$ و $L(M_4)$ هیچکدام زیرمجموعه دیگری نیست. پس سایر گزینه‌ها نادرستند.

26- گزینه (3) صحیح است.

طول رشته‌های زبان L_n حداقل n است و پس ماشین متناهی پذیرنده زبان L_n حداقل $n+1$ حالت دارد. یک نمونه از این ماشین را مشاهده می‌کنید:



27- گزینه (3) صحیح است.

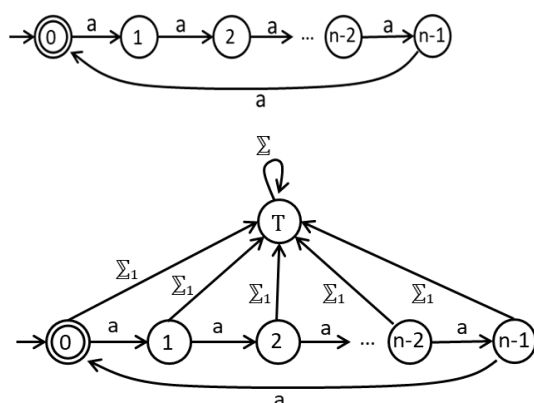
حالت‌های A و C برای ورودی‌های 0 و 1 کاملاً مشابه رفتار می‌کنند. هر دو حالت با ورودی 0 به حالت C انتقال دارند و خروجی 0 تولید می‌کنند. هر دو حالت با ورودی 1 به حالت B انتقال دارند و خروجی 0 تولید می‌کنند.

28- گزینه (2) صحیح است.

ابتدا به چند نمونه از یافتن R توجه کنید. برای زبان منظم $L = \Sigma^*$ ، زیرمجموعه R می‌تواند $R = \{a\}$ یا $R = \{a, b\}$ که هم زیرمجموعه L هستند و هم هیچ عضوی از آن کاهش یافته دیگری نیست. اگر $L = a^*$ باشد آنگاه R می‌تواند $R = \{\lambda\}$ یا $R = \{aa\}$ یا $R = \{aa, b\}$ باشد. با این مثال‌ها نادرستی گزینه‌های 1 و 3 مشخص می‌شود. گزینه 4 نیز نادرست است هر چند قدری مبهم بیان شده است. اگر $L = \Sigma^*$ باشد ماشین قطعی کمینه پذیرنده L دو حالت دارد در حالی که $R = \{aaaa, bbb\}$ یک کاهش یافته زیررشته‌ای برای L است. اما گزینه 2 صحیح است: اگر R نامتناهی باشد، یعنی بی‌نهایت رشته در L وجود دارد که هیچکدام کاهش یافته دیگری نیست. این غیرممکن است زیرا مجموعه الفبا متناهی است.

29- گزینه (4) صحیح است.

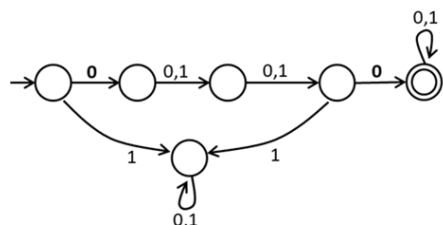
اگر $\Sigma = \{a\}$ باشد و الفبایی به جز a نداشته باشیم، آنگاه DFA کمینه به صورت زیر است و n حالت دارد.



اما اگر $\Sigma = \{a\} \cup \Sigma_1$ یعنی الفبایی به جز a نیز داشته باشیم حالت تله لازم است پس DFA کمینه به صورت زیر است و $n+1$ حالت دارد.

30- گزینه (4) صحیح است.

ابتدا صورت سوال را بهتر درک کنیم. اگر مثلاً $B = \{2, 4\}$ باشد ماشین باید تمام رشته‌های باینری که دومین و چهارمین حرف آنها 0 است را بپذیرد. اگر $B = \{1\}$ باشد ماشین باید تمام رشته‌های باینری که اولین حرف آنها 0 است را بپذیرد. در حالت کلی می‌خواهیم ماشین تمام رشته‌های باینری که اندیس‌های عضو B ، در آنها 0 است را بپذیرد. بنابراین محل آخرین 0، باید نظیر بزرگترین اندیس عضو B باشد. پس تا اینجا $\max(B) + 1$ حالت نیاز است. برای قطعی بودن ماشین به یک حالت تله هم نیاز است بنابراین تعداد حالات DFA کمینه $\max(B) + 2$ خواهد بود.



برای مثال اگر $B = \{1, 4\}$ باشد اولین و چهارمین حرف باید 0 باشد تا رشته پذیرفته شود پس DFA کمینه به صورت زیر است و 6 حالت دارد.

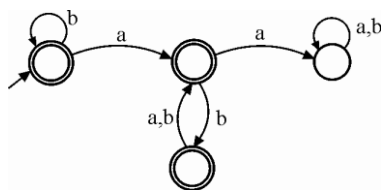
31- گزینه (3) صحیح است.

در حالت کلی: فرض کنیم مجموعه حالات $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$ و مجموعه الفبا $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ باشد. هر حالت می‌تواند حالت پذیرش یا غیرپذیرش باشد پس به 2^k روش می‌توان حالات پذیرش انتخاب کرد. از حالت q_1 برای هر الفبا می‌توان به k حالت انتقال تعریف کرد یعنی k^n روش برای تعریف انتقال‌ها داریم. همین تعداد انتخاب را برای حالات دیگر هم داریم پس تعداد روش‌های ساخت تابع انتقال $k^n \times k^n \times \dots \times k^n = k^{kn}$ است. در ضمن انتخاب حالت اولیه نیز به k روش ممکن است. با استفاده از اصل ضرب تعداد کل انتخاب‌ها $2^k \times k^{kn} \times k = 2^k k^{kn+1}$ است. در این تست تعداد الفبا $n=2$ است پس $2^k k^{2k+1}$ جواب است.

توجه: در پاسخ به این سؤال باید چند فرض را در نظر گرفت: ماشین‌های شمارش شده ممکن است هم‌ارز باشند و برخی از آنها زبان یکسانی را بپذیرند. ما به عنوان یک مساله ترکیباتی به سوال جواب دادیم و حتی برخی از گرافهای به شمارش شده ممکن است یکریخت باشند.

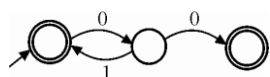
32- گزینه (1) صحیح است.

DFA کمینه برای این زبان چهار حالت دارد و به صورت مقابل است:



33- گزینه (4) صحیح است.

آتوماتون کمینه معادل با این ماشین دارای سه حالت است و مطابق شکل است. عبارت منظم معادل با آن $(01)^*(00 + \lambda)$ است. آتوماتون داده شده قطعی نیست چون انتقال λ دارد. زبان مورد پذیرش آن نامتناهی است زیرا در مسیر از حالت اولیه به حالت پذیرش دور 01 وجود دارد.



با این توضیحات گزینه‌های 1، 2 و 3 نادرستند. گزینه 4 نیز با اندکی اغماض صحیح است. برای پذیرش هر ورودی به جز λ ، باید از تمام حالات این آتوماتون گذر کرد البته برای پذیرش رشته 00 دو مسیر وجود دارد. یکی از مسیرها از تمامی حالات و دیگری تنها از 2 حالت عبور می‌کند. به هر صورت گزینه 4 بهترین گزینه است.

34- گزینه (4) صحیح است.

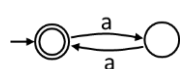
با مصرف رشته 011111111111 در یکی از حالات 2 یا 3 متوقف می‌شویم. پس این رشته پذیرفته نمی‌شود. اما با مصرف سایر گزینه‌ها دستکم یک مسیر که به پذیرش منجر می‌شود وجود دارد. این مسیرها را نشان داده‌ایم:

$$\langle 1 \rangle \xrightarrow{\varepsilon} \langle 2 \rangle \xrightarrow{10101} \langle 2 \rangle \xrightarrow{0} \langle 3 \rangle \xrightarrow{1} \langle 3 \rangle \xrightarrow{0} \langle 4 \rangle \xrightarrow{00001} \langle 4 \rangle$$

$$\langle 1 \rangle \xrightarrow{\varepsilon} \langle 2 \rangle \xrightarrow{0101010101} \langle 2 \rangle \xrightarrow{0} \langle 3 \rangle \xrightarrow{1} \langle 3 \rangle \xrightarrow{0} \langle 4 \rangle$$

$$\langle 1 \rangle \xrightarrow{\varepsilon} \langle 2 \rangle \xrightarrow{1000111} \langle 2 \rangle \xrightarrow{0} \langle 3 \rangle \xrightarrow{0} \langle 4 \rangle \xrightarrow{0111} \langle 4 \rangle$$

35- گزینه (2) صحیح است.

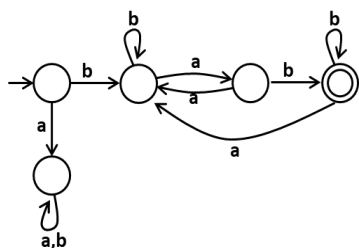


برای قرار گرفتن در حالت پذیرش تعداد الفبای a باید زوج باشد. پس زبان مورد پذیرش این ماشین، $(aa)^*$ است. از آنجا که $\Sigma = \{a\}$ پس DFA کمینه مطابق شکل است.

36- گزینه (3) صحیح است.

جمله (I) درست است. کلاس زبان‌هایی که توسط NFA تشخیص داده می‌شوند همان کلاس زبان‌های منظم است. زبان‌های منظم تحت مکمل بسته هستند. جمله (II) درست است. هر زبان منظم دارای بی‌نهایت DFA پذیرنده است. پس برای هر DFA می‌توان یک DFA دیگر یافت که با آن معادل باشد. اما جمله (III) نادرست است. این مطلب در DFA درست است نه در NFA.

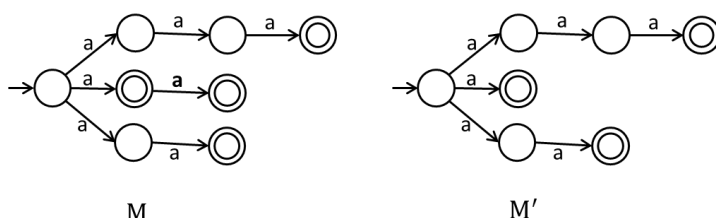
37- گزینه (3) صحیح است.



کوچکترین رشته عضو این زبان bab است. برای پذیرش آن به 4 حالت احتیاج داریم. از طرفی رشته‌هایی که با a آغاز شوند باید به حالت تله بروند تا اینجا دستکم 5 حالت لازم است. اتوماتون قطعی کمینه برای این زبان به شکل مقابل است و 5 حالت دارد.

38- گزینه (4) صحیح است.

جمله «الف» نادرست است. این نحوه مکمل گرفتن برای DFA درست است نه برای NFA. جمله «ب» نادرست است. طبق این این جمله اگر در ماشین‌های غیرقطعی، $L(M) = L$ باشد و انتقال‌های خروجی از حالات پذیرش را حذف کنیم، ماشین M' به دست می‌آید که زبان مورد پذیرش آن رشته‌هایی از L را هستند که هیچ پیشوند محضی از آنها عضو L نیست. برای رد این ادعا به این مثال نقض توجه کنید:



در این مثال $L(M) = \{a, aa, aaa\}$ و $L(M') = \{a, aa, aaa\}$. در $L(M')$ رشته‌هایی وجود دارد که پسوند محض آنها عضو $L(M)$ است:

$$w = aaa \in L(M')$$

$$u = aa \in L(M)$$

39- گزینه (3) صحیح است.

زبان ماشین متناهی داده شده عبارتست از:

$$(0+1)^* 0((0+1)(0+1)(0+1))^* 0(0+1)^*$$

عبارت $((0+1)(0+1)(0+1))^*$ نشان‌دهنده رشته دلخواه به طول $3k$ است. پس، رشته‌هایی عضو $L(M)$ هستند که در آنها دو رقم 0 با فاصله $3k$ از یکدیگر وجود داشته باشد. با قرار دادن هر کدام از ارقام 0 و 1 به جای x رشته‌هایی به دست می‌آیند که عضو این زبان هستند. اگر $x = 0$ قرار دهیم 111100100100011 و اگر $x = 1$ قرار دهیم 111100101100011 هر دو عضو $L(M)$ هستند.

40- گزینه (1) صحیح است.

فرض کنیم $L_1 = L(D_1)$ و $L_2 = L(D_2)$. در ماشین $D = D_1 \times D_2$ ، حالات پایانی به این شکل معرفی شده‌اند:

$$F = \{\langle a_i, a_j \rangle \mid (q_i \in F_1 \wedge q_j \in F_2) \vee (q_i \notin F_1 \wedge q_j \in F_2)\}$$

پس این ماشین رشته‌هایی را می‌پذیرد که فقط عضو یکی از دو زبان L_1 یا L_2 باشند. به عبارتی تفاضل متقارن L_1 و L_2 را می‌پذیرد.

$$L(D_1 \times D_2) = [L_1 - L_2] \cup [L_2 - L_1]$$

در نتیجه:

اگر $L_1 = L_2$ باشد، $L_1 - L_2$ و $L_2 - L_1$ هر دو تهی هستند پس $L(D_1 \times D_2) = \emptyset$.

اگر $L_1 \subseteq L_2$ باشد، $L_1 - L_2$ تهی است پس $L(D_1 \times D_2) = L_2 - L_1$.

اگر $L_2 \subseteq L_1$ باشد، $L_2 - L_1$ تهی است پس $L(D_1 \times D_2) = L_1 - L_2$.

اگر $L_1 \neq L_2$ باشد، حداقل یکی از تفاضلات، ناتهی است پس $L(D_1 \times D_2) \neq \emptyset$.

41- گزینه (2) صحیح است.

تمام انتقال‌های با الفبای b وارد حالت پذیرش می‌شوند. در نتیجه هر رشته‌ای که به الفبای b ختم شود پذیرفته می‌شود. پس w هر چه باشد رشته $b^{1403}wb$ پذیرفته می‌شود. یعنی جمله (ب) درست است. اما (الف) رد می‌شود. برای رد کردن (الف) رشته $w = a^{1402}b$ را در نظر بگیریم که عضو L است، با a شروع می‌شود و اندازه‌اش 1403 است و عضو L است. با این انتخاب داریم:

$$a^{1403}wa = a^{1403}a^{1402}ba$$

با مصرف $a^{1403}a^{1402}$ به q_2 می‌رسیم سپس با مصرف b وارد q_3 می‌شویم و سپس با a به حالت غیرپذیرش q_4 می‌رسیم. پس $a^{1403}wa$ عضو L نیست.

پیروز و سربلند باشید.